

Παρεμβολή με κυβικές συναρτήσεις Spline

Έστω η διαμέριση $X_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

όπου $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ του $\Delta[a, b]$

Έστω $S(X_n) \in C^2[a, b]$ είναι το σύνολο των
επιτρεπόμενων κυβικών συναρτήσεων στα διαστήματα
 $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$S(f, X_n; x_i) = S(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Θεώρημα: Δοθέντων $S_0' = f'(x_0)$ και $S_n' = f'(x_n)$ τότε

υπάρχει μία μοναδική κυβική συνάρτηση π/ω

$$S(f, X_n; x_i) = f(x_i) \text{ και } S'(f, X_n; a) = S_0' \text{ και}$$

$$S'(f, X_n; b) = S_n'$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $S_i' = S'(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$

Τότε βρίσκουμε των κυβική συνάρτηση Hermite

όπου η παράγωγος στα ειδικά σημεία των

Hermite να είναι τα S_i' γιατί έχουμε φράγματα

ετσι,

$$S(x) = \left(\frac{(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right) f_i + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} S_i' \\ + \left(\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{(\Delta x_i)^3} \right) f_{i+1} + \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} S_{i+1}'$$

Προσέλαβε τώρα τα $S'_i, i=1,2,\dots,n-1$ ανακτώντας σωστά τις $S''(x_i), i=1,2,\dots,n-1$. (Θέλαμε $S''(x_i)$ οφαιλι)

$$S''(x) = \left(\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right) f_i + \left(\frac{6x - 2(x_i + 2x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2} \right) S'_i + \left(\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^3} \right) f_{i+1} + \left(\frac{6x - 2(2x_i + x_{i+1})}{(\Delta x_i)^2} \right) S'_{i+1}$$

Μας ενδιαφέρει στα x_i , άρα

$$\bullet S''(x_i) = \left(\frac{2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{4x_i - 4x_{i+1}}{(\Delta x_i)^3} \right) f_i + \frac{4x_i - 4x_{i+1}}{(\Delta x_i)^2} S'_i + \left(\frac{2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{2x_i - 2x_{i+1}}{(\Delta x_i)^3} \right) f_{i+1} + \frac{2x_i - 2x_{i+1}}{(\Delta x_i)^2} S'_{i+1}$$

$$= -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_i - \frac{4}{\Delta x_i} S'_i + \frac{6}{(\Delta x_i)^2} f_{i+1} - \frac{2}{\Delta x_i} S'_{i+1} =$$

$$= \frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i - \frac{4}{\Delta x_i} S'_i - \frac{2}{\Delta x_i} S'_{i+1}$$

$$\bullet S''(x_{i+1}) = -\frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i + \frac{2}{\Delta x_i} S'_i + \frac{4}{\Delta x_i} S'_{i+1} \quad (\text{οφαιλις})$$

Για να έχω ομαλότητα στη δεύτερη παράγωγο $S''(x_i)$ στο $[x_i, x_{i+1}]$ θα πρέπει

$$S''(x_i) \Big|_{[x_i, x_{i+1}]} = S''(x_i) \Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{(\Delta x_i)^2} \Delta f_i - \frac{4}{\Delta x_i} S'_i - \frac{2}{\Delta x_i} S'_{i+1} = -\frac{6}{(\Delta x_{i-1})^2} \Delta f_{i-1} + \frac{2}{\Delta x_{i-1}} S'_{i-1} + \frac{4}{\Delta x_{i-1}} S'_i$$

$$\Leftrightarrow \Delta x_i \cdot S'_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) S'_i + \Delta x_{i-1} \cdot S'_{i+1} = 3 \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \Delta f_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \Delta f_i \right]$$

$$\forall i=1,2,\dots,n-1$$

Θα έχουμε λοιπόν το σύστημα

Σπιδραγμνίος πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 \\ & & \ddots \\ & & \Delta x_{n-2} \\ \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n-1} \end{bmatrix} =$$

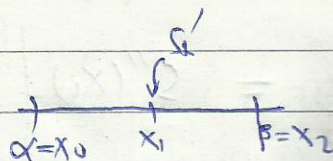
$$= \begin{bmatrix} 3\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \Delta f_0\right) - \Delta x_1 f'(a) \\ 3\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Delta f_2\right) \\ \vdots \\ 3\left[\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}} \Delta f_{n-2} + \frac{\Delta x_{n-2}}{\Delta x_{n-1}} \Delta f_{n-1}\right] - \Delta x_{n-2} f'(b) \end{bmatrix}$$

Αν οι είναι διατεταγμένα τα $x_i \Rightarrow$ τα στοιχεία του πίνακα είναι θετικά

Αν ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός διαγώνια μηδενικός τότε κάθε διαγώνιο στοιχείο είναι μεγαλύτερο ή το άθροισμα των υπολοίπων στοιχείων της κάθε γραμμής $\Rightarrow$ Αντιστρέφεται $\Rightarrow$ προσαρτημένος

$$A s' = \hat{f}$$

Αν έχουμε το πρόβλημα τότε:



$$2(\Delta x_0 + \Delta x_1) s'_1 = 3\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \Delta f_0\right) - \Delta x_1 f'(a) - \Delta x_0 f'(b)$$

Νομο σε αυτή των μεγετών

Ασκήση (5ος)

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline που προεγγίζει την f που δίνεται από

$$\begin{array}{c|c|c|c|} x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -8 & -1 & 1 & 8 \end{array}, \quad f'(-2) = 12 \text{ και } f'(2) = 12$$

Λύση

$$\Delta x_0 = 1, \quad \Delta x_1 = 2, \quad \Delta x_2 = 1, \quad \Delta f_0 = 7, \quad \Delta f_1 = 2, \quad \Delta f_2 = 7$$
$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \Delta f_0 \right) - \Delta x_1 f'(x_0) \\ 3 \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Delta f_2 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta f_1 \right) - \Delta x_2 f'(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6S'_1 + S'_2 = 21 \\ S'_1 + 6S'_2 = 21 \end{cases} \Rightarrow S'_1 = S'_2 = 3$$

$$S(x) = \left[\frac{(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3} \right] f_i + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} S'_i$$
$$+ \left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^3} \right] f_{i+1} + \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} S'_{i+1}$$

• $x \in [-2, -1]$

$$S(x) = \left[(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1)^2 \right] (-8) + (x+2)(x+1)^2 \cdot 12 + \left[(x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)^2 \right] (-1)$$
$$+ (x+1)(x+2)^2 \cdot 3 = x^3$$

• $x \in [-1, 1]$

$$S(x) = \left[\frac{(x-1)^2}{4} + 2 \frac{(x+1)(x-1)^2}{8} \right] (-1) + \frac{(x+1)(x-1)^2}{4} \cdot 3 + \left[\frac{(x+1)^2}{4} - 2 \frac{(x-1)(x+1)^2}{8} \right] 1$$
$$+ \frac{(x-1)(x+1)^2}{4} \cdot 3 = x^3$$

• $x \in [1, 2]$

$$S(x) = \left[(x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)^2 \right] 1 + (x-1)(x-2)^2 \cdot 3 + \left[(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2 \right] 8 +$$
$$(x-2)(x-1)^2 \cdot 12 = x^3$$

Διάσπαση του χώρου $S(X_n)$ - Βάση του χώρου $S(X_n)$

η διάσπαση επί 4 η διάσπαση του κυβικού πολυωνύμου ανά διάσπαση $\Rightarrow 4n$

Αφαιρούμε το $3(n-2)$ για τη συνέχεια των S του S' και του S'' στα $(n-1)$ εφιδάκτιστα σημεία
 $4n - 3(n-1) = n+3$

Χρησιμοποιούμε $n+3$ πληροφορίες $\Rightarrow n+1$ οι τιμές των f σε όλους τους κόμβους + 2 οι τιμές $f'(a)$ και $f'(b)$, συνολο $n+3$

Βάση του $S(X_n)$: $\{X, X^2, C_0(x), C_1(x), \dots, C_n(x)\}$
όπου $C_i(x)$ είναι η κυβική συνάρτηση Spline
ε/ω $C_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, C_i'(a) = C_i'(b) = 0, i=0, \dots, n$
Αυτές λέγονται

Ορίσματα Splines.

Θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό των βάσεων

$$t(x) = x + \beta x^2 + \sum_{j=0}^n \alpha_j C_j(x)$$

$$S(x_i) = \alpha x_i + \beta x_i^2 + \alpha_i = f_i$$

Επομένως, τα α_i δίνονται από

$$\alpha_i = f_i - \alpha x_i - \beta x_i^2$$

$$S'(a) = \alpha + 2\beta a = f'(a)$$

$$S'(b) = \alpha + 2\beta b = f'(b)$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \frac{bf'(a) - af'(b)}{b-a} \\ \beta = \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b-a)} \end{array} \right|$$